

代数曲線補集合のハンドル分解

北海道大学大学院理学研究院数学部門

菅原朔見 (Sakumi Sugawara) *

概要

複素多項式の零点集合として定義された \mathbb{C}^2 内の図形を (平面) 代数曲線という。代数曲線補集合は、代数幾何、トポロジー両観点から長く研究されてきた対象である。1980 年ごろ Moishezon により導入されたブレイドモノドロミーという概念により、代数曲線のトポロジーの研究が大きく進展した。本研究では、ブレイドモノドロミーのアイデアを元に、代数曲線補集合の微分同相型を記述するハンドル分解、そしてそれを絡み目の図式として表す Kirby 図式が得られたので、それについて紹介したい。

1 導入

被約な複素二変数の多項式 $f \in \mathbb{C}[x, y]$ で定義された \mathbb{C}^2 内の図形 $C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ を (アフィン平面) 代数曲線と呼ぶ。補集合を $M = \mathbb{C}^2 \setminus C$ とおく。代数曲線の補集合は、代数幾何、トポロジーの両観点から長く研究されてきた対象である。補集合のトポロジーに関して最も注目すべき最初の研究は、Zariski による 1929 年の論文 [19] であろう。彼は与えられた代数曲線を分岐集合として持つような分岐被覆に関する研究を契機とし、補集合の基本群に関する研究を行なった。同論文は代数曲線補集合のトポロジーに関する興味深い問題を示唆しており、その後長くにわたり代数曲線のトポロジーにおける主要な研究対象となった (例えば、二重点のみを特異点として持つ曲線の補集合の基本群に関する問題や、Zariski 対に関する問題など)。Zariski により研究された補集合の基本群を計算する手法は、後に van Kampen [10] により完成させられ、現在 Zariski–van Kampen の定理として代数曲線のトポロジーにおける基本的な手法となっている。

さて、Zariski–van Kampen による補集合の基本群の計算方法は Moishezon [14] によりブレイドモノドロミーと呼ばれる概念へと発展する。ブレイドモノドロミーにより得られる補集合の基本群の表示は、Zariski–van Kampen によるものよりも関係式が少なく、“良い” 表示であった。実際、Libgober [11] により、ブレイドモノドロミーにより得られる補集合の基本群の表示から得られる 2 次元 CW 複体が、補集合とホモトピー同値であることが知られている。ブレイドモノドロミーは代数曲線のトポロジーを研究する上で強力なツールであり、後に Artal–Carmona–Cogolludo [2] により、アフィン平面曲線のブレイドモノドロミーが、付随する射影平面内の曲線の埋め込みの位相を決めることがわかった。

一方で、補集合 M は Stein 曲面、すなわち複素 Euclid 空間への双正則埋め込みを持つ複素曲面で

* E-mail: math.skm.sugawara@gmail.com

ある。Stein 曲面は 4 次元トポロジーにおいても重要な研究対象であり、ハンドル分解、Kirby 図式や、Lefschetz 束などを用いて研究されてきた [8, 6, 12, 15]。そこで、与えられた Stein 曲面に対して、その微分同相型を求めることは自然な問いである。

以上を踏まえて、本研究では代数曲線補集合の微分同相型を調べた。結果として、ブレイドモノドロミーのアイデアを基に、補集合の微分同相型を表すハンドル分解や Kirby 図式を求める方法を与えることができた。詳細は [17, 18] を参照されたい。

2 代数曲線のブレイドモノドロミー

本節では、代数曲線のブレイドモノドロミーについて述べ、補集合の基本群やホモトピー型について紹介する。ブレイドモノドロミーに関する詳細は [3, 4, 14] を参照されたい。また、代数曲線補集合の基本群については、[16] の第一部に詳細な解説がある。そちらも参照されたい。

$f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ を複素二変数の被約な n 次多項式とし、 y^n の係数が 0 でないと仮定する。多項式 $f(x, y)$ が定める代数曲線を $C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ とし、その補集合を $M = \mathbb{C}^2 \setminus C$ とおく。第一成分への射影を $\pi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ とし、各 $x \in \mathbb{C}$ に対し、 $L_x = \pi^{-1}(x)$ とおく。射影の各ファイバーと曲線の交わり $L_x \cap C$ は高々 n 点集合であることに注意する。複素平面 \mathbb{C} 内の部分集合 X を以下で定義する：

$$X = \{p \in \mathbb{C} \mid \#(L_p \cap C) < n\}.$$

これは L_p が C と接するか、 C の特異点を含むような点 p の集まりである。別の言い方をすれば、各 $p \in \mathbb{C}$ を固定するごとに得られる y についての n 次多項式 $f(p, y)$ が重根を持つような p の集まりである。 X は有限集合であり、 $X = \{p_1, \dots, p_N\}$ と表す。任意の $p_i \in X$ に対して、 L_{p_i} が C の特異点または C との接点を高々 1 点含むようにジェネリックに仮定できる。このとき以下が成り立つ。証明は例えば [5] の Lemma 3.3.5 などを参照。

命題 2.1 射影の制限 $\pi: \mathbb{C}^2 \setminus (C \cup \pi^{-1}(X)) \rightarrow \mathbb{C} \setminus X$ は $\mathbb{C} \setminus (n \text{ points})$ をファイバーに持つファイバー束である。

このファイバー束のモノドロミーについて観察していく。各点 $p_i \in X$ を中心とする十分小さい円板 U_i とし、これの境界の円周から一点 $p'_i \in \partial U_i$ をとる。基点 $p_0 \in \mathbb{C} \setminus X$ をとり、 p_0 と p'_i を結ぶ自己交叉のない道 s_i を、「 $i \neq j$ ならば $s_i \cap s_j = \{p_0\}$ 」となるようにとる（このような道の集まり (s_1, \dots, s_N) を基点 p_0 と集合 $\{p'_1, \dots, p'_N\}$ に関する Hurwitz 系と呼ぶことにする）。 p_0 を基点とし、 $s_i, \partial U_i, s_i^{-1}$ を結んでできる道のホモトピー類を $\gamma_i \in \pi_1(\mathbb{C} \setminus X, p_0)$ とおく。 $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ は $\pi_1(\mathbb{C} \setminus X, p_0) \cong F_N$ (階数 N の自由群) の生成系をなす。各ループ γ_i に沿って、ファイバー束 $\pi: \mathbb{C}^2 \setminus (C \cup \pi^{-1}(X)) \rightarrow \mathbb{C} \setminus X$ を自明化することで、 L_{p_0} 内の $L_{p_0} \cap C$ を保つような自己同相が得られる。そのためこのファイバー束からは準同型

$$\Phi: \pi_1(\mathbb{C} \setminus X, p_0) \rightarrow B(L_{p_0}, L_{p_0} \cap C)$$

を得る。ここで、 $B(L_{p_0}, L_{p_0} \cap C)$ は $L_{p_0} \cap C$ を保つような L_{p_0} の写像類群であり、 n 本の紐からなるブレイド群 B_n と同型である。そのため、この準同型 Φ は代数曲線のブレイドモノドロミーと呼ばれる。各生成元 γ_i に対するモノドロミーを $\beta_i = \Phi(\gamma_i) \in B(L_{p_0}, L_{p_0} \cap C)$ とおく。

基点のファイバーと曲線の交わりを $L_{p_0} \cap C = \{q_1, \dots, q_n\}$ とおく. $L_{p_0} \setminus (L_{p_0} \cap C)$ から基点 q_0 をとり, 基点 q_0 と集合 $\{q_1, \dots, q_n\}$ に関する L_{p_0} 内の Hurwitz 系をとり, 先と同様に対応する $\pi_1(L_{p_0} \setminus (L_{p_0} \cap C), q_0)$ の生成元を e_1, \dots, e_n とする.

また, $p \in \partial U_i$ に対して $L_p \cap C$ は n 点集合である. 点 p が p_i に近づくとき, このうち m_i 点が一点に潰れる (L_{p_i} が C と横断的に交わる時, m_i は特異点の重複度に一致する) と仮定し, この潰れる m_i 点に対応する $L_{p_0} \cap C$ の点の集まりを $\{q_{i_1}, \dots, q_{i_{m_i}}\}$ とおく. 対応する添字集合を $I_i = \{i_1, \dots, i_{m_i-1}\}$ とおく.

以上の準備のもと, 以下が成り立つことが知られている.

定理 2.2 ([11]) 補集合 $M = \mathbb{C}^2 \setminus C$ は以下の基本群の表示から得られる 2 次元の CW 複体とホモトピー同値である:

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus C) \cong \langle e_1, \dots, e_n \mid \beta_i \cdot e_j = e_j, i = 1, \dots, N, j \in I_i \rangle.$$

ここで \cdot はブレイド群の自由群への Artin 作用を表す.

この定理は補集合を上記の表示を持つ 2 次元 CW 複体へとレトラクトさせていくことで証明される. ここで, 「 S^3 内の結び目群の Wirtinger 表示, そして Artin 表示が表す 2 次元 CW 複体は補集合とホモトピー同値である」という事実を局所的に用いている. 添字集合 I_i が m_i 個ではなく $m_i - 1$ 個の元からなるのは, 結び目群の Wirtinger 表示や Artin 表示の不足数が 1 であることに由来する.

3 代数曲線補集合のハンドル分解

本節では, 代数曲線の補集合 $M = \mathbb{C}^2 \setminus C$ のハンドル分解について述べる.

補集合 M は開多様体であるので, \mathbb{C}^2 内の十分大きな半径を持つ多重円板 $D \times D$ (角を解消すれば 4 次元球体と微分同相) と曲線に対する十分小さくジェネリックな正則近傍 $\nu(C)$ をとり, $M_0 = (D \times D) \setminus \nu(C)$ のハンドル分解を考えることにする. このとき M_0 はコンパクト境界付き 4 次元多様体であり, M_0 の内部は M と微分同相である. 射影 π を M_0 へと制限したものを $\pi_0: M_0 \rightarrow D$ とおく. このとき, π_0 の制限 $\pi_0: M_0 \setminus \left(\bigcup_{i=1}^N \pi_0^{-1}(U_i) \right) \rightarrow D \setminus \bigcup_{i=1}^N U_i$ はやはりファイバー束であり, そのファイバーは $n+1$ 個の境界成分を持つ種数 0 の曲面 (つまり, 大きさのある穴を n 個開けた円板 D_n) であることに注意されたい.

基点 p_0 と ∂D を結ぶ自己交叉のない道 s_0 で, $s_0 \cap s_i = \{p_0\}$ ($i = 1, \dots, N$) となるようなものを取り, 各 $i = 0, 1, \dots, N$ に対して道 s_i の十分小さい管状近傍 $\nu(s_i)$ とする. さらに $\nu(\Gamma) = \bigcup_{i=1}^N U_i \cup \bigcup_{i=0}^N \nu(s_i)$ とおく (図 1 を参照).

このとき, $D \setminus \nu(\Gamma)$ は円板と同相であり, したがって可縮である. よってこの上では, 射影から得られるファイバー束は自明となり, ファイバーは n 個穴あき円板 D_n であるから, 次を得る.

命題 3.1 $\pi_0^{-1}(D \setminus \nu(\Gamma))$ は 1 ハンドル体 $\mathfrak{h}_n(S^1 \times D^3) (\cong D_n \times D^2)$ と微分同相である.

ハンドル分解を求めたい多様体は $M_0 = \pi_0^{-1}(D \setminus \nu(\Gamma)) \cup \pi_0^{-1}(\nu(\Gamma))$ であるから, 後は上記の 1 ハンドル体に $\pi_0^{-1}(\nu(\Gamma))$ がどのように接着されているかを見ればよい.

各 $i = 1, \dots, N$ に対し, $V_i \subset U_i$ を p_i を中心とする円板で, 任意の $p \in V_i$ が $L_p \cap C \cong D_{n-(m_i-1)}$

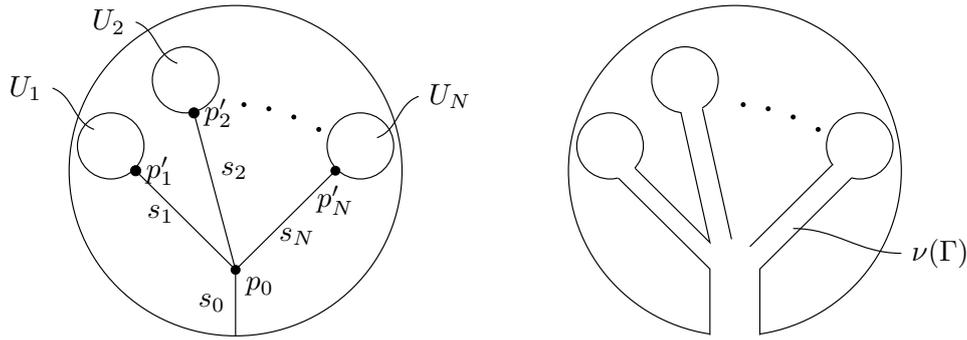


図1 道の集まり s_0, s_1, \dots, s_N と $\nu(\Gamma)$

を満たすようにとる. 点 p_i のまわりでパーツ分けし, A, B を図2のように定める.

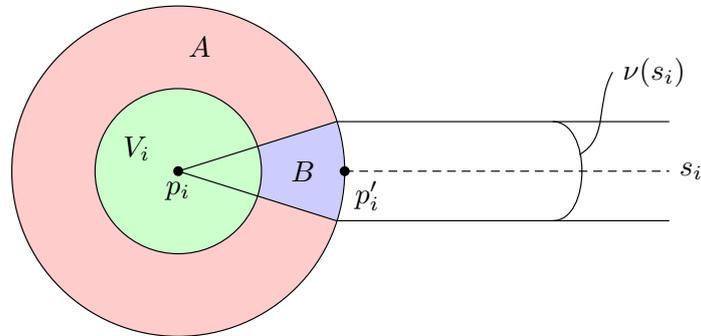


図2 領域 A と B

このとき, 実は $\pi_0^{-1}(A)$, $\pi_0^{-1}(V_i)$ を順に接着しても多様体の微分同相型が変わらないことがわかる^{*1}. そして, 残る部分 $\pi_0^{-1}(B)$ をこれに接着することが, $m_i - 1$ 個の 2-ハンドル接着になっている. この 2-ハンドル接着の概要を, 簡単のために $m_i = 2$ と仮定して見てみよう. B の両端の連結成分について, ∂U_i 側では $L_p \cap C$ から得られる二つの連結成分があるが, V_i 側では, V_i に対する仮定より $L_p \cap C$ から得られる連結成分は一つになっている (図3). さらに図のように, ∂U_i 側から V_i 側へ近づくとつれ, $L_p \cap C$ から得られる連結成分が二つから一つへ真っ直ぐに減っていることがわかる^{*2}. B を放物線状の弧で区切っていき, そのファイバーの様子を見ていくと, 弧 α_2 のファイバー上にある青色の円が弧を右に進めていくと消えていく様子わかる (図4). このとき, この青い円がハンドルの接着円となるような, 2-ハンドルの接着が行われていることがわかる^{*3}. また, $m_i \geq 3$ の場合もこの操作を繰り返していくことで, 同様の 2-ハンドルの接着が行われることがわかる. 残りの部分 $\pi_0^{-1}(\nu(s_i))$ の接着は全て多様体の微分同相型をかえず, 結局各 i に対して, $m_i - 1$ 個の 2-ハンドルが接着されるようなハンドル分解を M_0 は持つことがわかる.

^{*1} 詳細は [17] の 6 ページの議論を参照.

^{*2} これは C の正則近傍を十分小さくとることにより可能になっている.

^{*3} 実際に 2-ハンドルの接着になっていることは, 境界の 3 次元多様体へ制限して得られる安定写像が不定値折り目のみの特異点にもつことを用い, 具体的に座標を表示することからわかる.

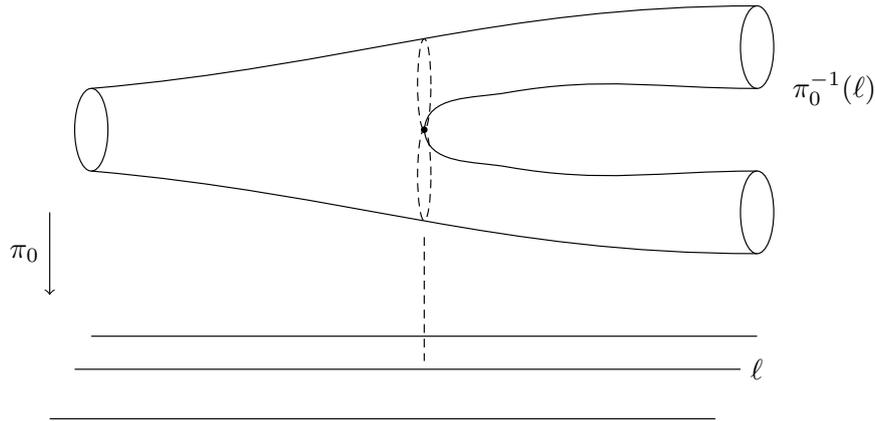


図3 $\pi_0^{-1}(B)$ の様子. ℓ は B 内の半径方向に伸びる直線である.

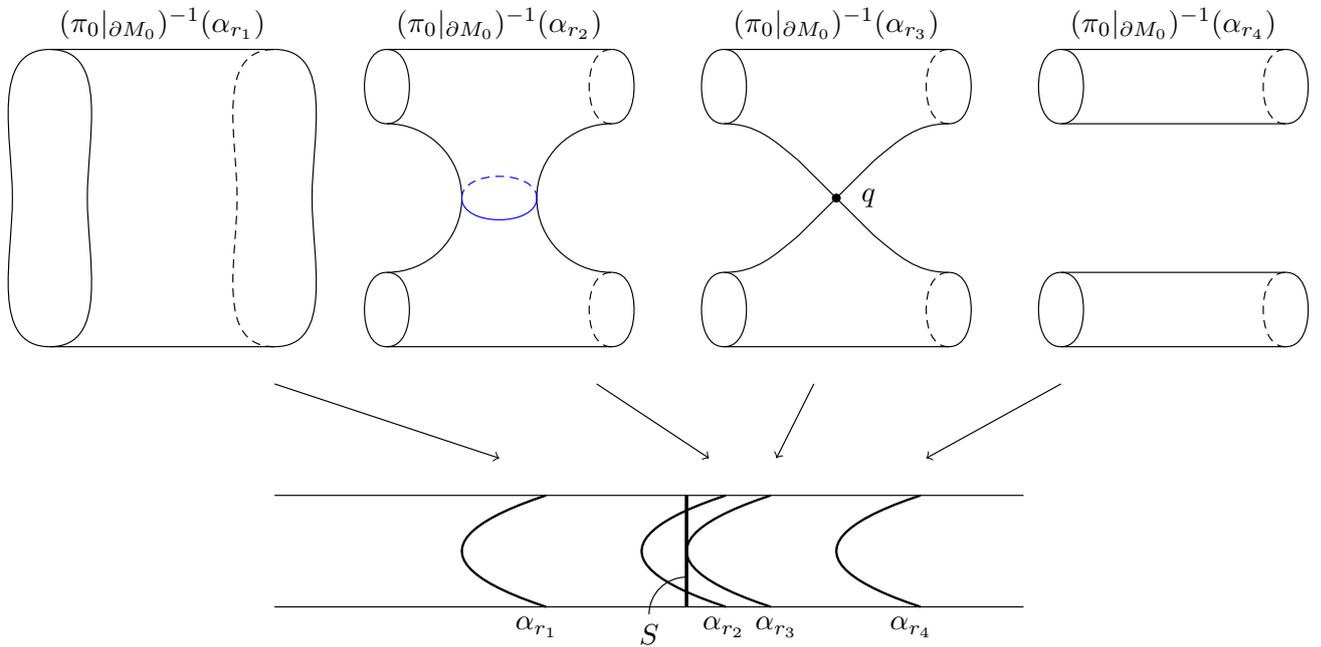


図4 B 内の弧とその上のファイバー

4 代数曲線補集合の Kirby 図式

本節では、前節でハンドル分解を求めた補集合 $M = \mathbb{C}^2 \setminus C$ の Kirby 図式について述べる.

補集合 M_0 は 2-ハンドル体であることがわかったので、1-ハンドルの接着を表す点付き円、2-ハンドルの接着を表す枠付き絡み目を描ければよい. まず初めに、1-ハンドルの接着は、適切に埋め込まれた円板 D^2 を取り除くこと (キャンセル 2-ハンドルの除去) によっても得られることを思い出す. このようにして得られる 1-ハンドル接着の Kirby 図式における点付き円は、取り除かれる円板の境界 ∂D^2 そのものであった (キャンセル 2-ハンドルのベルト球面に対応). 現在ハンドル分解を考えている多様体の 1-ハンドル体は、 $\pi_0^{-1}(D \setminus \nu(\Gamma))$ である. そして、これは 4 次元球体

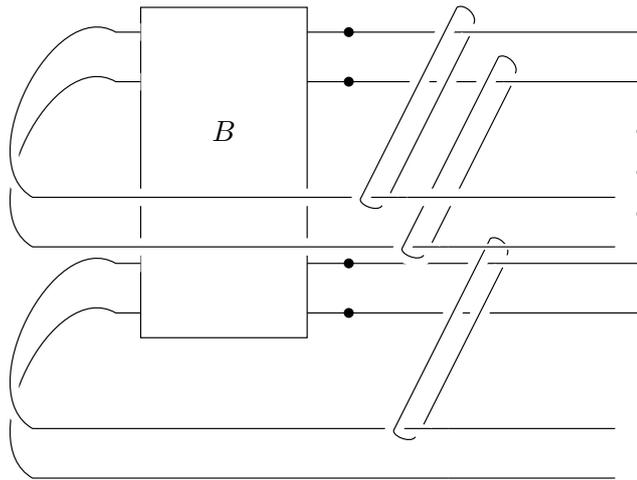


図5 Kirby 図式の局所的な様子

$\pi^{-1}(D \setminus \nu(\Gamma))$ から $\pi^{-1}(D \setminus \nu(\Gamma)) \cap C$ が作る n 個の互いに交わらない適切に埋め込まれた円板を除くことにより得られている. よって 1-ハンドル接着を表す点付き円は $\pi^{-1}(\partial(D \setminus \nu(\Gamma))) \cap C$ となる.

続いて 2-ハンドルの接着を考える. 2-ハンドルの接着は, 各 $p_i \in X$ に対し, L_{p_i} の周りで局所的に行われていた. このとき, Kirby 図式において 2-ハンドルの接着を表す接着円は, ブレイドに橋をかけるように, 図5のように表される. ここで, B は p_i に付随する局所的なモノドロミーを表すブレイドである. これらをつなぎ合わせていくことで, M_0 の Kirby 図式を得る. また, フレーミング係数はどのような場合でも全て 0 であることもわかる.

例 4.1 定義式を $f(x, y) = x^p - y^q$ とする. このとき $X = \{0\}$ である. グラフ Γ を図6のようにすると, そこから得られる Kirby 図式は図7のようになる. ここで, $B_{p,q}$ は q 本の紐からなるブレイド群 B_q の元で, 隣り合う i 番目と $i+1$ 番目の紐の半捻りを表す標準的な生成元 σ_i とした時に, $B_{p,q} = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{q-1})^p$ と表される元である.

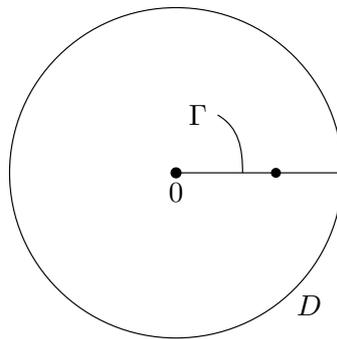


図6 定義式 $f(x, y) = x^p - y^q$ に対して定まるグラフ Γ

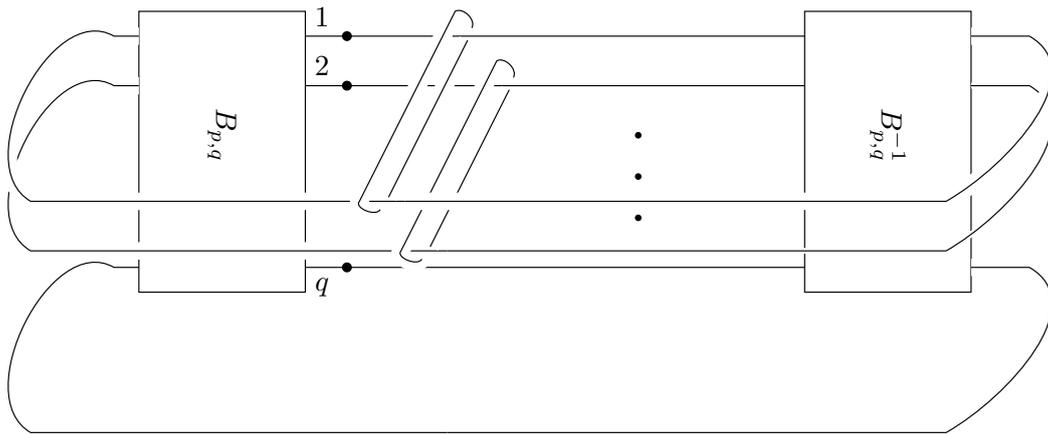


図7 曲線 $x^p - y^q = 0$ の補集合の Kirby 図式

参考文献

- [1] E. Artal Bartolo, J. Carmona Ruber, and J. I. Cogolludo Agustín, Braid monodromy and topology of plane curves, *Duke Math. J.* **118** (2003), 261–278.
- [2] J. I. Cogolludo Agustín, Braid monodromy of algebraic curves, *Ann. Math. Blaise Pascal* **18** (2011), no. 1, 141–209.
- [3] D. C. Cohen, A. Suciu, The braid monodromy of plane algebraic curves and hyperplane arrangements. *Comment. Math. Helvetici* **72** (1997), no. 2, 285–315.
- [4] A. Dimca, Singularities and topology of hypersurfaces, Universitext, *Springer-Verlag, New York*, (1992), xvi+263 pp.
- [5] Y. Eliashberg, Topological characterization of Stein manifolds of dimension > 2 , *Internat. J. Math.*, **1** (1990), 29–46.
- [6] R. E. Gompf, Handlebody construction of Stein surfaces, *Ann. of Math.* **148** (1998), no. 2, 619–693.
- [7] E. R. van Kampen, On the fundamental group of an algebraic curve, *Amer. J. Math.*, **55** (1933), 255–260.
- [8] A. Libgober, On the homotopy type of the complement to plane algebraic curves, *J. Reine Angew. Math.*, **367** (1986), 103–114.
- [9] A. Loi, R. Piergallini, Compact Stein surfaces with boundary as branched covers of B^4 , *Invent. Math.*, (2001), no. 2, 325–348.
- [10] J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, Ann. Math. Studies, vol. **61**, Princeton University Press, Princeton (1968).
- [11] B. Moishezon, Stable branch curves and braid monodromies, Lectures Notes in Math., 862, *Springer-Verlag*, (1981), 107–192.
- [12] B. Ozbagci, A. Stipsicz, Surgery on contact 3-manifolds and Stein surfaces, Bolyai Soc. Math. Stud., 13, *Springer-Verlag, Berlin; János Bolyai Mathematical Society, Budapest*, 2004, 281 pp.

- [13] 石川剛郎, 徳永浩雄, 島田伊知朗, 齋藤幸子, 福井敏純, 代数曲線と特異点, 特異点の数理 4, 共立出版 (2001)
- [14] S. Sugawara, Handle decompositions and Kirby diagrams for the complement of plane algebraic curves, arXiv:2306.10519, preprint.
- [15] S. Sugawara, On the topology of the complements of plane algebraic curves, Ph. D. Thesis, Hokkaido University, <https://doi.org/10.14943/doctoral.k16082>
- [16] O. Zariski, On the problem of existence of algebraic function of two variables possessing a given branch curve, *Amer. J. Math.*, **51** (1929), 305–328.